

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11.

1. Juni 1913.

Redaktionsschluß für No. 12 am 31. Mai 1913.

14. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

- P. P. Ewald, Zur Theorie der Interferenzen der Röntgenstrahlen in Kristallen. S. 465.
 W. H. Bragg, Die Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen. S. 472.
 G. Leimbach, Die Energieaufnahme elektrischer Sender von kleiner Wellenlänge. S. 473.
 W. Dzierwulski, Über den magnetischen Kerreffekt bei äquatorialer Magnetisierung. S. 485.
 F. Streintz u. A. Wesely, Über den Widerstand zwischen zwei

ebenen, sich berührenden Metallplatten. I. Mitteilung. S. 489.

J. Stark, Einfaches Verfahren zur Darstellung von Argon; chemische Aktivierung zweiatomiger Gase im Glimmstrom. S. 497.

C. Mainka, Dämpfungsanordnung bei Erschütterungsmessern. S. 499.

Besprechungen:

Handwörterbuch der Naturwissenschaften. S. 499.

Landolt-Börnsteins Physikalisch-chemische Tabellen. S. 500.

H. Poincaré, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. S. 500.

P. Drude, Lehrbuch der Optik. S. 502.

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. VI. VII. S. 502.

C. Dornier, Beitrag zur Berechnung der Luftschrauben unter Zugrundelegung der Rateauschen Theorie. S. 503.

Berichtigung. S. 503.

Tagesereignisse. S. 503.

Personalien. S. 504.

Angebote. S. 504.

Gesuche. S. 504.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Theorie der Interferenzen der Röntgenstrahlen in Kristallen.

Von P. P. Ewald.

Zurzeit stehen sich bei der Deutung der von Laue¹⁾ angegebenen Interferenzerscheinungen der Röntgenstrahlen zwei Ansichten gegenüber. Die von Laue vorgeschlagene Erklärung schreibt die Maxima der Strahlungsintensität, welche von der Kristallplatte ausgehen, dem Zusammenwirken der einzelnen Resonatoren (Dipole) im Innern des Kristalls zu, deren regelmäßige Anordnung den Kristall als dreidimensionales Beugungsgitter auffassen läßt. Andererseits läßt sich im Anschluß an Bragg die Lage der Interferenzbilder durch die Annahme gut erklären, daß der einfallende Röntgenstrahl an jeder kristallographisch möglichen Ebene (Netzebene des Raumgitters) regulär reflektiert werde. Bei genauer Betrachtung verschwindet der Unterschied zwischen den beiden Auffassungen, wie schon G. Wulff²⁾ und M. Laue³⁾ gezeigt haben (vgl. § 5). Der Zusammenhang der Erscheinungen beim Durchgang von Röntgenstrahlen oder von gewöhnlichem Licht durch einen Kristall läßt sich aus den Formeln der §§ 3 und 4 ohne weiteres entnehmen.

Ferner werden in den §§ 5 und 6 Schlüsse über die Natur der Interferenzstrahlen, über die Fleckenform u. a. m. gezogen, § 7 ist ihrer Intensität gewidmet. Hingegen wird nicht angestrebt, eine wirkliche Aufnahme zu analysieren, um daraus Schlüsse auf das zugrunde liegende Raumgitter zu ziehen.

§ 1. Die Dipole des Raumgitters sollen in den Punkten

$$X = 2al, \quad Y = 2bm, \quad Z = 2cn \quad (1)$$

(l, m, n ganzzahlig)

liegen, wo XYZ rechtwinklige Koordinaten bedeuten. Das Gitter ist also das einfachste rhombische (bzw. tetragonale oder kubische).

Im Gitter schreite ein Röntgenstrahl in der Richtung

$$s = x \cos(s, x) + y \cos(s, y) + z \cos(s, z) \quad (2)$$

fort. Seine Geschwindigkeit im Innern des Körpers ist

nahezu die Lichtgeschwindigkeit c , da keine merkliche Brechung des Strahls eintritt. Die Geschwindigkeit c selbst läßt sich dem Röntgenstrahl theoretisch nicht zuschreiben, da, wie in der Optik, die in Mitschwingung geratenden Dipole die Ausbreitung der Welle beeinflussen. Ein Unterschied gegen die Optik liegt darin, daß die Schwingungen, welche vom Röntgenstrahl erregt werden, so schwach sind, daß die Phasengeschwindigkeit der Welle nur unmerkbar beeinflusst wird. Immerhin werde im ersten Teil wegen des leichteren Übergangs zum optischen Fall zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit im leeren Raum (c) und im Körper (q) unterschieden.

Jeder Dipol wird durch das Vorbeistreichen der Welle zu Schwingungen angeregt, welche sich nach der Zeit in periodische Glieder auflösen lassen. Eine solche Schwingung habe die Periode ω . Dann ist die elektrische Kugelwelle durch das Hertzsche Potential

$$a \frac{e^{-i\omega(t - \frac{R}{c})}}{R} \quad (3)$$

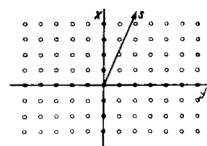


Fig. 1.

1) M. Laue, W. Friedrich, P. Knipping, Sitzber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1912, S. 303 und 363.

2) Diese Zeitschr. 14, 217–220, 1913.

3) M. Laue, diese Zeitschr. 14, 421, 1913.

gegeben, wo a die Amplitude der Schwingung, R der Abstand Dipol—Aufpunkt ist. Infolge der sukzessiven Anregung der Dipole durch X-Strahl oder optische Welle ist das Potential eines Dipols mit den Koordinaten XYZ

$$\mathfrak{P} = a \frac{e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c} - \frac{S}{q}\right)}}{R}, \quad (4)$$

wo S die dem s in (2) analoge Bedeutung

$S = X \cos(s, x) + Y \cos(s, y) + Z \cos(s, z)$ hat, d. h. den Abstand des Dipols von der Phasenebene Null mißt.

Wird zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} &= K_0 \left(= \frac{2\pi}{\lambda} \right), & \frac{\omega}{q} &= K, \\ K \cos(s, x) &= \alpha, & K \cos(s, y) &= \beta, \\ & & K \cos(s, z) &= \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

gesetzt, so ist bei Fortlassen des Zeitfaktors das Gesamtpotential

$$a = a \sum \frac{e^{iK_0 R + iKS}}{R}, \quad (6)$$

wo die Summe über alle Dipole zu erstrecken ist.

Es sei daran erinnert, daß die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ aus dem Potential gefunden wird, indem man

$$\mathfrak{E} = \text{rot rot } a \Pi = \text{grad div } a \Pi - a \Delta \Pi \quad (7)$$

bildet.
§ 2. Es sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem es sich um die Ausbreitung des Röntgenstrahls im Innern des Kristalls, seinen Einfall oder seinen Austritt handelt.

$$\Pi = -\frac{\pi}{2abc} \sum_{l,m,n} \frac{e^{-i\frac{l\pi - a\alpha}{a}} x^{-i\frac{m\pi - b\beta}{b}} y^{-i\frac{n\pi - c\gamma}{c}} z}{K_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 - \left(\frac{n\pi - c\gamma}{c}\right)^2}. \quad (8)$$

Dies Potential hat genau die Form einer nach Eigenschwingungen fortschreitenden Summe, wie z. B. das akustische Potential einer Tonquelle in einem rechteckigen Zimmer¹⁾. Die einzelne Eigenschwingung ist

$$\left. \begin{aligned} u_{l,m,n} &= e^{-i\frac{l\pi - a\alpha}{a}} x^{-i\frac{m\pi - b\beta}{b}} y^{-i\frac{n\pi - c\gamma}{c}} z \\ &= e^{+iKs} \cdot e^{-i\left(l\pi \frac{x}{a} + m\pi \frac{y}{b} + n\pi \frac{z}{c}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Sie besteht aus einem Faktor von der gleichen Gestalt wie der anregende Röntgenstrahl (vgl. den Ansatz (4) oder (6)) und aus einem zweiten Faktor, der in den Elementarparallelepipeden des Gitters periodisch sich wiederholt (Glieder einer Fourierreihe). Sie läßt sich auch als ebene Welle auffassen; deren Richtungskosinus sich verhält wie

$$\frac{l\pi - a\alpha}{a} : \frac{m\pi - b\beta}{b} : \frac{n\pi - c\gamma}{c}. \quad (9a)$$

¹⁾ Vgl. Sommerfeld, diese Zeitschr.

I. Im ersten Falle nämlich wird man sich den ganzen Raum vom Gitter (1) ausgefüllt denken und demgemäß in (6) über l, m, n von $-\infty$ bis $+\infty$ summieren. Dies ist genau die in meiner Dissertation¹⁾ gelöste Aufgabe, so daß die ausgeführte Summe von dort entnommen werden kann.

II. Den Eintritt eines Röntgenstrahls in die Kristallplatte erhält man, wenn nur ein Halbraum vom Gitter eingenommen wird. Die Summation von (6) wäre also für l, m von $-\infty$ bis $+\infty$, für n hingegen von 0 bis ∞ zu erstrecken (oberer Halbraum vom Kristall ausgefüllt).

III. Der Austritt aus dem Kristall läßt sich verfolgen, wenn in II. die Strahlrichtung umgekehrt wird, d. h. α, β, γ durch $-\alpha, -\beta, -\gamma$ ersetzt wird (siehe (5)).

Schematisch erhalten wir die folgenden drei Bilder:

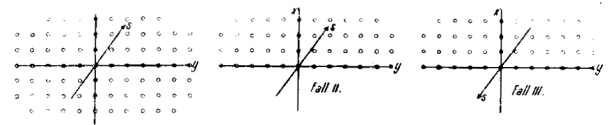


Fig. 2.

§ 3. Der Fall (I) möge an die Spitze gestellt werden, weil er prinzipiell der einfachste ist und unmittelbar zu den elektrischen Eigenschwingungen des Raumgitters führt. Das Potential (6) ist für diesen Fall (vgl. Formel (7), § 6 meiner Dissertation)

Je nachdem es sich um die Fortpflanzung eines sichtbaren Lichtstrahls oder eines Röntgenstrahls handelt, d. h. je nach der Frequenz ω , welche in K vorkommt, hat der eine oder der andere Faktor in $u_{l,m,n}$ das Hauptinteresse. Handelt es sich doch bei Lichtwellen um Wellenlängen, welche groß gegen den Gitterabstand $2a$ sind, so daß

$$2\pi \cdot \frac{a}{\lambda} = aK_0 \ll 1 \quad (1/200) \quad (10)$$

ist, und ebenso $a \cdot (K, \alpha, \beta, \gamma)$. Bei den Röntgenstrahlen steht hingegen fest, daß diese Größen beträchtlich groß gegen 1 sind (20 bis 200). Wir unterscheiden demnach:

1. $K \ll \frac{\pi}{a}$, optische Welle.

Der in den Elementarparallelepipeden peri-

¹⁾ Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern (Kristallen), Dissertation, München 1912.

odische Teil liefert keine Wellenlängen, welche mit optischen Wellenlängen vergleichbar wären; hingegen liefert der Faktor e^{iKs} Wellen von großer Wellenlänge, welche den Gliedern der Fourierreihe gegenüber am besten als langgezogene Dünung gekennzeichnet werden. Von der ganzen Fourierreihe wird optisch nichts weiter als der Mittelwert in einem Elementargebiet merklich, der durch das Glied 000 der Reihe dargestellt wird. Daher ist das optische Potential

$$\Pi = \frac{\pi}{2abc} \cdot e^{-iKs} \frac{1}{K^2 - K_0^2}. \quad (11)$$

Die höheren Glieder der Summe haben zudem Amplituden, welche mit der des Gliedes 000 gar nicht vergleichbar sind, da $K \ll \frac{\pi}{a}$.

2. $K \gg \frac{\pi}{a}$, Röntgenstrahl.

Hier haben jene Glieder der Summe (8) die größte Amplitude, für welche am nächsten Resonanz eintritt, d. h. für welche die ganzzahligen Indizes l, m, n am besten die Gleichung erfüllen:

$$\left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi - c\gamma}{c}\right)^2 = K_0^2. \quad (12)$$

Diese Bedingung sondert aus der unendlichen Zahl von Oberschwingungen des Raumgitters jene aus, welche bei gegebener Frequenz des Röntgenstrahls maximale Intensität haben; diese werden im Fall II und III des halben Kristalls durch die Trennungsfläche hindurch als Interferenzstrahlen hinaustreten.

Bei der geometrischen Interpretation dieser Bedingung ist hervorzuheben, daß K_0 und K für den Fall des Röntgenstrahls praktisch zusammenfallen. Dies geht experimentell aus der Abwesenheit jeder Spur von Brechung der X-Strahlen hervor; die Extrapolation des Brechungsindex auf Grund einer Dispersionsformel (z. B. der Planckschen) ergibt Werte wie

$$\nu^2 = \left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = 1 - 4 \cdot 10^{-8}, \quad (13)$$

also eine unmerkliche Abweichung von 1. Daher nehmen wir jetzt an:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K^2 = K_0^2. \quad (14)$$

Die Bedingung (12) bedeutet nun folgende Konstruktion: In einem Gitter mit den Teilungen $\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}$ („reziprokes Gitter“) schlage man um den Punkt (α, β, γ) die Kugel, welche durch den Nullpunkt des Gitters geht. Liegen auf der Kugelfläche noch andere Gitterpunkte $[l_0, m_0, n_0]$, so treten im Kristall Wellen mit maximaler Intensität auf, die die gleiche Richtung wie

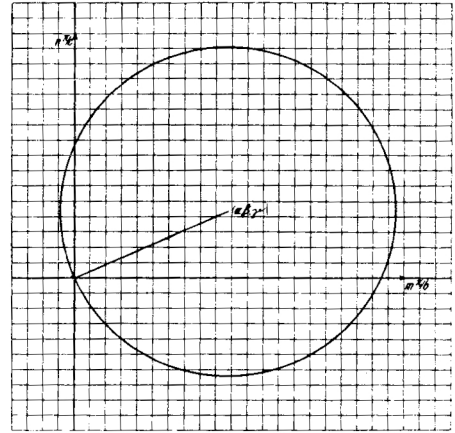


Fig. 3.

die Verbindungslinien von $[l_0, m_0, n_0]$ zum Mittelpunkt der Kugel haben.

Die Richtungskosinusse der Verbindungslinie $[l_0, m_0, n_0]$ nach (α, β, γ) im reziproken Gitter sind nämlich, wie aus (8) ersichtlich, zugleich die Richtungskosinusse der Wellennormale der entsprechenden Welle, die sich im Kristall ausbreitet. Daß der Nullpunkt des Gitters stets auf der Kugelfläche liegt, folgt aus (12) und (14).

Es ist bemerkenswert, daß die Wellen maximaler Intensität zugleich die einzigen Wellen des Potentials (8) sind, welche sich mit der Lichtgeschwindigkeit c im Gitter fortpflanzen. Für alle anderen Glieder von (8) ist ja die Quadratsumme der Faktoren von x, y, z im Exponenten von e anders als K_0^2 .

An der Fig. 3 lassen sich die bekannten Aussagen über Symmetrie bei senkrechter Inzidenz usw. ablesen. Doch scheint es zweckmäßig, zu den Fällen II und III überzugehen und das Feld im Außenraum zu untersuchen und den Einfluß der Grenzfläche $z=0$ festzustellen.

§ 4. Fall II. Einfall des Röntgenstrahls auf den Kristall. Werden mit genau dem gleichen Ansatz (6) für die Dipolschwingungen die Schwingungen des „halben Kristalls“ summiert, so ist zwischen dem Innenraum und dem Außenraum zu unterscheiden. Die Grenze zwischen beiden verläuft nicht, wie man zuerst annehmen könnte, in der letzten Gitterebene $z=0$, sondern der Kristall erscheint infolge der Periodizität des Feldes um den Abstand c einer Symmetrieebene fortgesetzt. Es ist notwendig, außer dem oberen Halbraum auch noch eine Schicht von der Dicke c des unteren zum Kristallinneren zu zählen. Die folgenden Formeln für den Außenraum gelten also für

$$z + c < 0, \quad (15)$$

dann aber streng, d. h. in jeder Entfernung von der Trennungsfläche.

Das Potential ist¹⁾:

$$\Pi = \frac{\pi}{4ab} e^{i\gamma} \sum_{l,m}^{\infty \dots +\infty} \frac{e^{-i \frac{l\pi - a\alpha}{a} x - i \frac{m\pi - b\beta}{b} y - i\nu_{l,m}(z+c)}}{\nu_{l,m} \cdot \sin c (\nu_{l,m} + \gamma)}, \quad (16)$$

wo

$$\nu_{l,m} = \sqrt{K_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2} \quad (16a)$$

ist.

Das einzelne Glied der Summe stellt wieder eine ebene Welle dar, die mit der Geschwindigkeit c fortschreitet. Maximale Amplitude entsteht auf zweierlei Art, entsprechend den beiden Faktoren im Nenner.

$$1. \quad \nu_{l,m} = 0,$$

das heißt

$$\left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2 = K^2. \quad (17)$$

Diese Glieder bedeuten ebene Wellen, welche parallel der Grenzfläche laufen. Man kann sie als Oberflächenwellen bezeichnen, da sie getrennt von der Oberfläche nicht existenzfähig zu sein scheinen. Experimentell sind sie nicht nachgewiesen, und es läßt sich theoretisch einsehen, daß ihre Energie an der Grenze der Kristalloberfläche in abgebeugte Energie übergeführt wird, indem die Oberflächenwellen vernichtet werden. Für die Unmöglichkeit des Nachweises dieser Wellen ist es wesentlich, daß nur ein begrenztes Stück Kristalloberfläche von dem ausgeblenden Röntgenstrahl durchstrahlt wird.

$$\Pi = -\frac{\pi}{4ab} e^{-i\gamma} \sum_{l,m}^{\infty \dots +\infty} \frac{e^{-i \frac{l\pi + a\alpha}{a} x - i \frac{m\pi + b\beta}{b} y - i\nu_{l,m}(z+c)}}{\nu_{l,m} \sin c (\nu_{l,m} - \gamma)}, \quad (19)$$

$$\nu_{l,m} = \sqrt{K_0^2 - \left(\frac{l\pi + a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi + b\beta}{b}\right)^2}. \quad (19a)$$

Um die beobachtbaren Wellen maximaler Intensität zu finden, dient die zu Fig. 3 analoge Konstruktion, bei der der Punkt $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ als Mittelpunkt der Kugel vom Radius K_0 gewählt wird. Da wieder die Wurzel (19a) positiv gemeint ist, muß diesmal $\frac{n\pi}{c} > -\gamma$ sein;

an der in Fig. 3 gezeichneten Kugel lassen sich diese Wellen durch die auf der unteren Hälfte der Kugel liegenden Punkte darstellen. Fig. 4 läßt die Bilder auf der Vorder- und auf der Rückseite des Kristalls ablesen, wobei die Orientierung etwas anders ist, als in Fig. 2 und 3. Die Pfeile sind

1) Die Ableitung dieser Formel geschieht nach den gleichen Methoden wie bei (8). Sie wird demnächst an anderer Stelle veröffentlicht werden.

$$2. \quad \sin c (\nu_{l,m} + \gamma) = 0,$$

das heißt

$$\sqrt{K_0^2 - \left(\frac{l\pi - a\alpha}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi - b\beta}{b}\right)^2} = \frac{n\pi - c\gamma}{c}. \quad (18)$$

Dies ist genau die Bedingung (12), so daß die Behauptung in §3 gerechtfertigt ist, daß die in Resonanzgeratenden Eigenschwingungen des Raumgitters nach außen hinaustreten.

Für $\nu_{l,m}$ ist in (16a) der positive Wert der Wurzel zu nehmen, so daß die Wellen von der Grenzfläche fort in den Außenraum eilen.

Nach (18) heißt dies, daß nur Werte von $\frac{n\pi}{c}$ statthaft sind, welche γ übertreffen. In der geometrischen Deutung der Fig. 3 sollen also nur jene Wellen l_0, m_0, n_0 genommen werden, die nach abwärts gehen ($n_0 > \gamma$). Hierdurch ist das einer Frequenz ω bzw. einem festen Werte K_0 zukommende Interferenzbild auf der Vorderseite vollständig festgelegt.

Fall III. Austritt eines Röntgenstrahls. Das Potential für den Außenraum wird aus (16) durch Umkehrung der Strahlrichtung (α, β, γ) erhalten:

nämlich so eingetragen, als würden die Interferenzstrahlen sowohl auf der Vorder- wie auf der Rückseite durch den auf den gezeichneten Kristall einfallenden Primärstrahl verursacht.

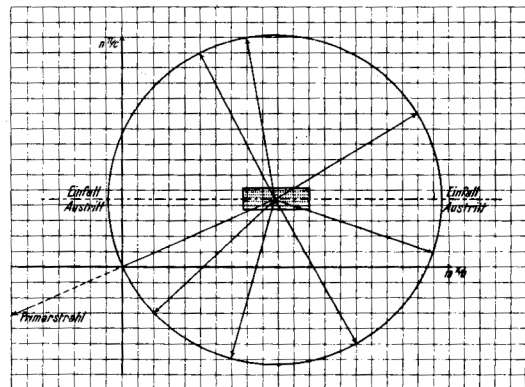


Fig. 4.

§ 5. Welche allgemeinen Aussagen lassen sich an Hand von Fig. 4 über die Interferenzbilder machen? Es möge zwischen zwei Fällen unterschieden werden: einmal soll die Frequenz, d. h. K_0 , festgehalten und die Richtung des Einfalls geändert werden. Der Punkt (α, β, γ) bewegt sich hierbei auf der um den Ursprung des reziproken Gitters gelegten Kugel vom Radius K_0 . Später soll die Richtung des Strahls fest sein und die Wellenlänge der X-Strahlen (bzw. ihrer Fourierentwicklung) innerhalb eines gewissen Bereichs variieren; in § 6 schließlich werden beide Arten von Variationen zugelassen.

Besonderer Wert wird bei dieser Besprechung auf die Erklärung des „reflektierten“ Strahls gelegt werden müssen, dessen Entstehung nicht ganz selbstverständlich ist. Während es sofort aus Fig. 4 ersichtlich ist, daß in der Richtung des einfallenden X-Strahls stets ein Interferenzmaximum liegt (vom X-Strahl auf den Aufnahmen verdeckt), folgt die Existenz und die große Intensität des reflektierten Strahls erst durch eine Reihe von Überlegungen.

Fall 1. K_0 fest, Richtung des Primärstrahls veränderlich.

1. An der Figur läßt sich sofort ein Reziprozitätssatz ablesen, der die Richtung des Einfalls und der Interferenzmaxima verknüpft: Werden die Interferenzstrahlen durch ihre Winkel gegen das Kristallgitter gekennzeichnet, so entsteht das geometrisch gleiche Interferenzbild, wenn der einfallende Röntgenstrahl mit irgendeinem Interferenzstrahl vertauscht wird.

Daß die Intensitätsverteilung sich bei dieser Vertauschung ändert, und das Gesetz dieser Änderung geht aus der Komponentenzerlegung des § 7 hervor.

2. Ein reflektierter Strahl existiert nur bei ausgezeichneten Lagen des Punktes (α, β, γ) ; nämlich, wenn χ den Einfallswinkel bedeutet, nur falls (α, β, γ) in eine der Symmetrieebenen $z = \text{const}$ des reziproken Gitters fällt:

$$\gamma = K_0 \cos \chi = h \cdot \frac{\pi}{2c}, \quad (20)$$

wo h eine ganze Zahl ist. Führt man die „Wellenlänge“ $\lambda = \frac{2\pi}{K_0}$ ein, so muß also der Einfallswinkel die Bedingung

$$\cos \chi = \frac{h}{2} \cdot \frac{\lambda}{2c}$$

erfüllen. Der Winkelunterschied zweier Richtungen, bei welchen Reflexion überhaupt möglich ist, beträgt demnach

$$\Delta \chi = \frac{\lambda}{4c \sin \chi}. \quad (20a)$$

Eine gleiche Formel haben E. Hupka und

W. Steinhaus¹⁾ gebraucht, um aus Streifungen im „reflektierten“ Interferenzfleck die Wellenlänge zu berechnen; $\Delta \chi$ bedeutet bei ihnen den Winkelabstand der Streifen, d. h. derjenigen Richtungen, in welchen die Reflexion besonders stark erscheint. Doch wird von anderer Seite den Streifungen mehr zufälliger Charakter beigelegt, indem sie durch Spaltflächen im Kristallinnern verursacht werden sollen.

Fall 2. Richtung fest, K_0 veränderlich.

Die wahre Zeitabhängigkeit der elektrischen Feldstärke eines Röntgenstrahls wird wohl nicht durch eine einzige harmonische Schwingung wiedergegeben, die bisher allein betrachtet wurde. Vielmehr deutet allein schon die Vorstellungsweise von der Entstehung des Röntgenimpulses aus der Bremsung eines Kathodenstrahlteilchens darauf hin, daß das Röntgenspektrum nur durch viele Glieder einer Fourierentwicklung darstellbar ist, welche merkliche Amplitude besitzen. Wir wollen nun annehmen, daß die Wellenlänge der auffallenden Strahlung innerhalb eines gewissen Bereichs kontinuierlich variieren möge; dem entspricht ein Bereich ΔK_0 für $K_0 = 2\pi/\lambda$. Wir setzen ferner bei den folgenden Überlegungen voraus, daß die Intensität des primären X-Strahlspektrums nicht zu schnell mit der Wellenlänge variiert. An der Fig. 4 sieht man leicht folgendes ein:

1. Da nur das Verhältnis des Kugelradius K_0 zur Gitterteilung auf die Lage der Interferenzpunkte von Einfluß ist, so werden die Interferenzbilder ähnlicher Raumgitter gleich sein, wenn nur

$$\frac{\pi/c}{K_0} = \frac{\lambda}{2c} \quad (21)$$

konstant ist. Da tatsächlich beobachtet wird²⁾, daß Substanzen mit gleichem Raumgitter und verschiedenem Molekularvolumen die gleichen Interferenzen liefern, so kann dies als Beweis für die Behauptung angesehen werden, daß das Spektrum des primären Röntgenstrahls sich über einen gewissen Bereich kontinuierlich erstreckt. Ebenfalls spricht hierfür die Temperaturunabhängigkeit der Interferenzbilder³⁾.

2. Jeder Interferenzstrahl enthält Wellen von verschiedenen Wellenlängen⁴⁾.

Hat man nämlich einen Interferenzpunkt $[l_0, m_0, n_0]$ gefunden, so lege man durch ihn und den Nullpunkt die Gerade $(l:m:n)$, welche alle Gitterpunkte enthält, die Interferenzstrahlen der gleichen Richtung

1) Ber. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 164, 1913.

2) W. Friedrich, in einer demnächst in den Ann. d. Phys. erscheinenden Arbeit.

3) De Broglie, Comptes Rendus 1913, S. 1011.

4) Siehe die analoge Betrachtung von G. Wulff, diese Zeitschr. 14, 220, 1913.

$$\left(l_0 \frac{\pi}{a} - \alpha\right) : \left(m_0 \frac{\pi}{b} - \beta\right) : \left(n_0 \frac{\pi}{c} - \gamma\right)$$

hervorbringen können, wenn die Richtung $\alpha : \beta : \gamma$ des Primärstrahls gegeben ist.

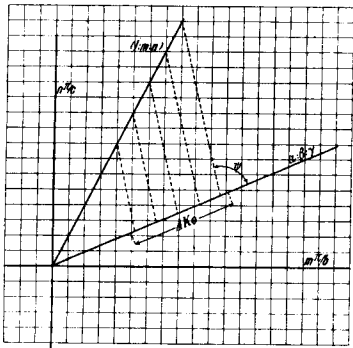


Fig. 5.

Für die Intensität des Interferenzfleckes kommt es darauf an, wie viele Punkte des Gitters an solchen Stellen auf der Geraden liegen, daß die zugehörigen Werte von K_0 innerhalb des gegebenen Intervalls ΔK_0 liegen. Je mehr solcher Punkte es gibt, um so größer wird die Intensität des Fleckes, der von diesen Strahlen gemeinsam erzeugt wird, sein. Die Anzahl der Punkte auf der Längeneinheit der Geraden $l : m : n$ ist proportional $(L^2 + M^2 + N^2)^{-1/2}$, wenn L, M, N die kleinsten ganzen Zahlen vom geforderten Verhältnis sind; die Länge des für die Punkte geeigneten Stückes der Geraden ist $2 \Delta K_0 \cdot \cos \frac{\psi}{2}$, wenn ψ den Winkel zwischen einfallendem Strahl und dem Interferenzstrahl bedeutet. Daher ist die Intensität eines Bildes proportional¹⁾

$$2 \cos \frac{\psi}{2} \cdot \frac{\Delta K_0}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}. \quad (22)$$

Für den reflektierten Strahl ist $\frac{\psi}{2}$ gleich dem Einfallswinkel γ .

3. Die Strahlen der Richtung

$$\left(l \frac{\pi}{a} - \alpha\right) : \left(m \frac{\pi}{b} - \beta\right) : \left(n \frac{\pi}{c} - \gamma\right)$$

können im Sinne der Braggschen Theorie erklärt werden als Reflexionen des einfallenden Strahls an einer Ebene senkrecht zur Geraden $(l : m : n)$. Diese Ebene hat die Indizes (l, M, N) , und es ist nach (22) ersichtlich, daß alle Kristallflächen mit niederen Indizes besonders gut zu reflektieren scheinen.

§ 6. Die Form der Interferenzfleckes läßt darauf schließen, daß ein einziger Röntgen-

strahl von bestimmter Richtung und Wellenlänge zur Erklärung der Erscheinung nicht genügt, sondern daß jeder Fleck seine Intensität dem Zusammentreffen einer Reihe von Einzelmaximis verdankt, welche je durch gewisse Bestandteile der auffallenden Intensität erzeugt werden.

Nach den Formeln (16) und (19) für das Potential im Außenraum treten ebene Wellen aus der Grenzschicht aus. Angenommen, daß der auffallende Röntgenstrahl durch eine Kreisblende ausgeschnitten wurde und daß er wirklich nur eine Richtung besäße („ebener Impuls“), so müßten alle Interferenzfleckes kreisförmig sein, wenn die photographische Platte der Grenzfläche parallel steht. Die Kreise hätten dabei gleichen Durchmesser wie die Blende. Dies stimmt mit

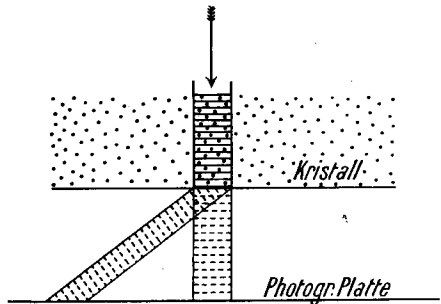


Fig. 6.

neueren Beobachtungen von Laue¹⁾ überein, welcher fand, daß die Fleckenform um so runder wird, je weiter die Röntgenröhre vom Kristall entfernt wird. Auf den ursprünglichen Aufnahmen von Laue, Friedrich und Knipping²⁾ ist die Fleckenform in die Länge gezogen, ungefähr elliptisch mit der großen Achse quer zur Richtung nach dem Zentrum der ganzen Figur. Diese Form kann durch Übereinanderlagerung vieler Maxima an Hand der Konstruktion von Fig. 4 so erklärt werden: Man denke sich die Figur zunächst für senkrechten Einfall gezeichnet (Fig. 7). Der Interferenzpunkt P möge entstehen. Nun werde die Richtung des Einfalls innerhalb eines kleinen Kegels $d\Omega$ variiert; entsteht dann um den ursprünglichen Interferenzstrahl ein Kegel von Nachbarinterferenzstrahlen? Es ist die Frage, ob es in Fig. 7 Lagen des Kugelmittelpunktes $(\alpha\beta\gamma)$ gibt, welche wieder den Punkt P als Interferenzpunkt erzeugen.

Um diese Lagen von $(\alpha\beta\gamma)$ zu finden, hat man diejenigen Punkte im Kegel $d\Omega$ aufzusuchen, welche vom Nullpunkt und von P gleich weit entfernt sind. Dies geschieht mittels der Ebene E (siehe Fig. 7), welche den Kegel $d\Omega$ in einer Ellipse durchsetzt. Von jedem der

1) Diese Zeitschr. 14, 421, 1913.

2) Sitzungsber. München 1912.

1) Vgl. die Formel bei L. S. Ovrstein, K. Acad. te Wetensch. Amsterd., März 1913, S. 1229, welche aus ganz anderen Betrachtungen gewonnen ist.

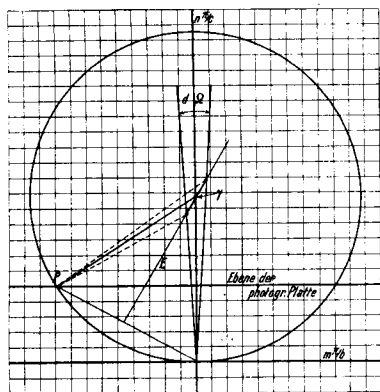


Fig. 7.

Punkte innerhalb der Ellipse geht ein Strahl in der Richtung nach P aus, und die Gesamtheit dieser Strahlen bildet einen Kreiskegel. Der Durchschnitt dieses Kegels und der photographischen Platte ist eine Ellipse, deren kleine Achse in der Ebene von Interferenzstrahl und einfallendem Strahl liegt. Jeder Punkt in dieser Ellipse ist der Mittelpunkt eines kreisförmigen Interferenzbildes, und so kommt es, daß die Flecken elliptisch sind und der Helligkeitsabfall nach dem Rande zu langsam geschieht¹⁾.

§ 7. Bisher wurde die Diskussion an das Hertzsche Potential (8) bzw. (16) und (19) angeschlossen. Es erübrigt nun festzustellen, welche Umstände beim Übergang zur elektrischen Feldstärke $\mathcal{E}$ nach der Vorschrift (7) hinzutreten.

Zu den Potentialen Π ist als vektorielle Amplitude α die Amplitude der Dipolschwingungen zu ergänzen, so daß das Potential eines der Summenglieder im wesentlichen die Form hat

$$\alpha \cdot e^{-iKs'}, \quad (23)$$

wo s' eben die Richtung des Interferenzstrahls ist. Bildet man aus diesem Potential $\mathcal{E}$, so stellt sich heraus, daß die Komponente $\alpha_{||}$ von α , welche in die Richtung von s fällt, keinen Beitrag zu $\mathcal{E}$ liefert. Nur die andere Komponente $\alpha_{\perp}$ ist überhaupt wirksam.

Es ist anzunehmen, daß die Dipole senkrecht zum einfallenden Röntgenstrahl (s) schwingen, da dieser Strahl bei weitem die größte Intensität hat. Soll nun die Intensität eines Interferenzstrahls (s') berechnet werden, so muß die Dipolamplitude α in die in der Ebene (ss') schwingende Komponente (α_1) und die andere $\perp (s, s')$ zerlegt werden (α_2). Die letztere kommt

für s' voll zur Wirkung, die erste mit dem Faktor $\cos(s's)$. Die Intensität des Strahls s' ist also

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \cos^2(s's). \quad (24)$$

Man sieht an den Interferenzbildern, daß die einfallenden Röntgenstrahlen (bzw. die Dipolschwingungen) nicht polarisiert sein können. Wären sie es nämlich, so müßten die Intensitäten zweier unter gleichem Winkel ($s's$) gegen den Primärstrahl

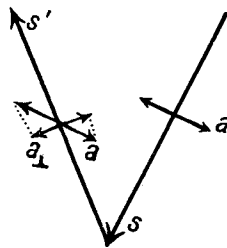


Fig. 8.

gelegener Interferenzstrahlen (korrespondierender Interferenzflecke in verschiedenen Quadranten) verschieden sein, weil die Zerlegung in die Komponenten α_1 und α_2 für beide Strahlen ungleich wäre.

Mit $\alpha_1 = \alpha_2$ ist die Intensität eines Strahls also proportional

$$1 + \cos^2(s's). \quad (25)$$

Es lohnt sich, für den reflektierten Strahl die Abhängigkeit der Intensität von dem Einfallswinkel χ zusammenzustellen.

Bei dem reflektierten Strahl ist (vgl. (20))

$$\frac{n\pi}{c} = 2\gamma,$$

und nach (18)

$$\nu_{lm} = \gamma = K_0 \cos \chi.$$

Nach (16) ist die Amplitude also proportional $\frac{1}{\cos \chi}$.

(22) zeigt ferner, daß die Anzahl der im reflektierten Strahl vertretenen Wellenlängen (Werte von K_0) proportional $\cos \chi$ ist, so daß die Intensität unter Berücksichtigung von (16), (22), (25) proportional wird mit

$$\frac{1 + \cos^2 2\gamma}{\cos \chi}. \quad (26)$$

Diese Funktion ist in Fig. 9 aufgetragen.

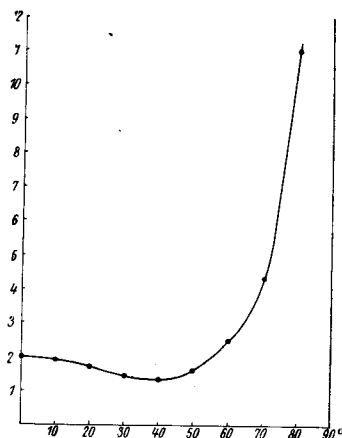


Fig. 9.

¹⁾ Vergl. die Tafeln in der ersten Publikation von Laue usw. Auch die Tatsache, daß die Interferenzflecken nahe hinter dem Kristall rund sind (siehe z. B. W. C. Bragg, l. c.) erklärt sich durch diese Überlagerung vieler kreisförmiger Flecken.

Das Reflexionsvermögen nimmt bei schrägem Einfall stark zu. Während es sich in dem Intervall zwischen 0° und 60° nur wenig ändert, ist es bei 80° auf das Fünffache des Wertes bei 60° gestiegen. Bei ganz streifender Inzidenz tritt in Wirklichkeit (wie bei den Oberflächenwellen in § 4, 1) Beugung an der Berandung der Oberfläche hinzu, welche in dieser Theorie nicht berücksichtigt wurde und die das weitere Ansteigen der Intensität verhindert. Man vergleiche die Reflexion einer Lichtwelle an einem unendlichen und an einem begrenzten Spiegel. Experimente, die von Herrn Friedrich unternommen werden, um die Intensität des reflektierten Strahles zu messen, sind noch nicht bis zur quantitativen Verwertung gediehen. Ein schneller Abfall der Intensität um den Einfallswinkel 70° herum ist auf den Aufnahmen nicht zu verkennen.

§ 8. Verhältnis zu anderen Theorien; Eigenstrahlung der Antikathode.

Die obigen Ausführungen enthalten die gleichen Gedanken wie die Lauesche Theorie und unterscheiden sich von dieser nur durch die Idealisierung des Problems (unendlicher Kristall, dafür aber Gültigkeit der Formeln in beliebiger Nähe des Körpers). Sie liefern daher auch die gleichen Ergebnisse, die Laue in seiner ersten Publikation veröffentlicht hat. Formel (9a) für die Richtungskosinuse der Interferenzstrahlen ist identisch mit Laues Gleichungen (7), wenn diese für ein rhombisches Gitter spezialisiert werden. Werden aus Laues Gl. (7) die Richtungskosinuse α , β , γ eliminiert, so entsteht genau (12). Auch alle weiteren geometrischen Folgerungen der beiden Theorien dürften identisch sein. Besonders findet auch Laue die Bedingung (20) für das Auftreten des reflektierten Strahls bei monochromatischem X-Strahl.

Formeln für die Intensität sind von Bragg¹⁾ und Ornstein²⁾ gewonnen worden, indem sie die Dichte der Moleküle in den reflektierenden Flächen berücksichtigten. Laue behält in der Intensität die unbekannte Funktion $\mathcal{P}(\alpha, \beta)$, welche die Strahlungsintensität des einzelnen Teilchens in Abhängigkeit von der Richtung setzt. Hier wird in § 7 die natürliche Richtungsabhängigkeit der Strahlung des gewöhnlichen Dipols verwertet. Die Formel (26) für die Stärke des reflektierten Strahls beruht auf der Voraussetzung, daß in der spektralen Verteilung der auffallenden Strahlung hinreichende Stetigkeit herrscht.

Gerade diese Voraussetzung scheint aber nach neuen Ergebnissen von Bragg³⁾ oft nicht

erfüllt zu sein, weil eine sehr starke und fast monochromatische Eigenstrahlung der Antikathode auftritt. Deren Interferenzen wären nach § 5, Fall 1 zu behandeln, zurzeit liegt aber genügendes experimentelles Material noch nicht vor. Es sei nur bemerkt, daß Bragg Reflexion der Eigenstrahlung bei einer Reihe von Einfallswinkeln gefunden hat, welche je etwa 4° auseinander liegen. Nach (20a) würde aus dieser Angabe auf ein Verhältnis von Wellenlänge zu Gitterabstand $= 1/10$ zu schließen sein; Laue brauchte zur Erklärung eine Reihe von Verhältnissen zwischen 0,04 und 0,14. Die Eigenstrahlung der Antikathode würde also in den bereits bekannten Spektralbereich fallen. Weitere Aufschlüsse über die Homogenität der Eigenstrahlung werden sich aus der Intensitätsverteilung in den Flecken ziehen lassen.

(Eingegangen 8. Mai 1913.)

Die Reflexion von Röntgenstrahlen an Kristallen.

(The reflection of X-rays by crystals.)

Von W. H. Bragg.

Im zweiten Aprilheft dieser Zeitschrift (14, 317, 1913) beschreibt Herr W. Friedrich eine neue Interferenzerscheinung bei Röntgenstrahlen. Bei diesen neuen Versuchen tritt der Einfluß der Natur der Antikathode deutlicher zutage als bei den ursprünglichen Versuchen, die sich auf die Theorie von Laue gründeten. Ich habe mich seit einiger Zeit mit der Untersuchung der Reflexion von Röntgenstrahlen in Kristallflächen nach einem Ionisierungsverfahren beschäftigt, und diese meine Messungen lassen gleichfalls den Einfluß der Natur der Antikathode erkennen. Ich glaube, sie beleuchten einigermaßen diese neue Arbeit des Herrn Friedrich. Eine ausführliche Schilderung von ihnen ist in einer Arbeit erschienen, die mein Sohn und ich kürzlich der Royal Society vorgelegt haben, und ich will hier nur einen kurzen Bericht zu geben versuchen.

Ein sehr feines Röntgenstrahlenbündel wird in einer Oberflächenebene eines Kristalls reflektiert, die entweder eine Spaltfläche ist, oder so geschnitten ist, daß sie eine der übrigen wichtigen Ebenen bildet. Das reflektierte Strahlenbündel wird nach einem Ionisierungsverfahren untersucht, und die ganze Apparatur ähnelt einem Spektrometer, in dem das Fernrohr durch eine Ionisierungskammer ersetzt ist.

Es sind folgende Tatsachen festzustellen: In der von uns benutzten Röntgenröhre waren neben anderen, nicht eingehend untersuchten Strahlen drei homogene Strahlenbündel vorhanden, von denen jedes nur von einer be-

1) loc. cit.

2) loc. cit.

3) Roy. Soc. London, Sitzung vom 17. April. Siehe Nature, 24. April 1913.